更新日 2026/05/10

複素関数 1刷り 正誤表

P189 演習 8-3 本文解を下記に修正するものである

解） 積分の絶対値には

$$\int_\Gamma \frac{\exp(iz)}{z} dz \le \left| \int_\Gamma \frac{\exp(iz)}{z} dz \right| \le \int_\Gamma \left| \frac{\exp(iz)}{z} \right| |dz|$$

という関係が成立することを利用する。

この積分路の Γ では

$$z = R\exp(i\theta) = R(\cos\theta + i\sin\theta)$$

であるから

$$\exp(iz) = \exp\left\{ iR(\cos\theta + i\sin\theta) \right\} = \exp(iR\cos\theta)\exp(-R\sin\theta)$$

となる。したがって

$$\frac{\exp(iz)}{z} dz = \frac{\exp(iR\cos\theta)\exp(-R\sin\theta)}{R\exp(i\theta)} Ri\exp(i\theta)d\theta$$

$$= i\exp(iR\cos\theta)\exp(-R\sin\theta)d\theta$$

となる。よって

$$\left| \frac{\exp(iz)}{z} \right| |dz| = \exp(-R\sin\theta)d\theta$$

となる。Γ に沿った積分の積分範囲は $0 \le \theta \le \pi$ であるから

$$\int_\Gamma \left| \frac{\exp(iz)}{z} dz \right| = \int_0^\pi \exp(-R\sin\theta)d\theta$$

となる。また、$R\sin\theta \ge 0$ であるから $R \to \infty$ で

$$\exp(-R\sin\theta) \to 0$$

となる。よって、右辺の積分は 0 となり

$$\int_\Gamma \left| \frac{\exp(iz)}{z} \right| |dz| \to 0$$

となるので

$$\int_\Gamma \frac{\exp(iz)}{z} dz \to 0$$

となる。

$R \to \infty$ のとき $\int_0^\pi \exp(-R\sin\theta)\, d\theta \to 0$ となる補足説明

被積分関数のグラフは 0 から π の範囲では図 A-1 のようになる。

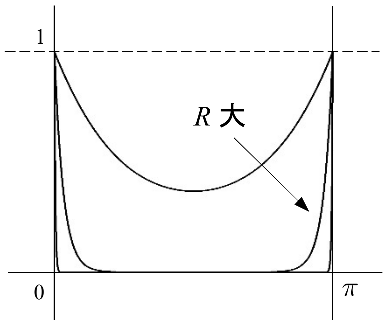

図 A-1　$\exp(-R\sin\theta)$ のグラフ

したがって、上下端では 1 という値を有する。つまり、両端が 1 を保ったまま、$R\to\infty$ で囲まれた面積、つまり積分が 0 に近づくことがわかる。

さらに、不等式を使って確かめてみる。グラフの対称性から

$$\int_0^{\pi} \exp(-R\sin\theta)d\theta = 2\int_0^{\pi/2} \exp(-R\sin\theta)d\theta$$

となる。さらに、$0\le\theta\le\pi/2$ では図 A-2 から

$$\sin\theta \ge \frac{2}{\pi}\theta$$

という不等式が成立する。よって

$$\int_0^{\pi/2} \exp(-R\sin\theta)d\theta \le \int_0^{\pi/2} \exp\left(-\frac{2}{\pi}R\theta\right)d\theta$$

$$=\left[-\frac{\pi}{2R}\exp\left(-\frac{2}{\pi}R\theta\right)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2R}\{1-\exp(-R)\}$$

となる。

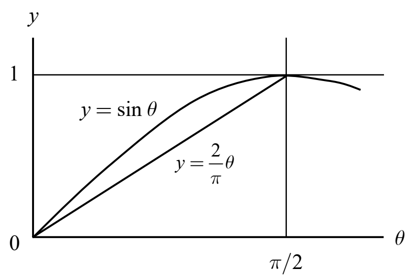

図 A-2　$\sin\theta\ge(2/\pi)\theta$ を示す図

したがって

$$\int_\Gamma \left|\frac{\exp(iz)}{z}\right| |dz| \le \frac{\pi}{R}\{1-\exp(-R)\}$$

という関係が成立し $R\to\infty$ のとき

$$\int_\Gamma \frac{\exp(iz)}{z}\,dz \to 0$$

となることが確かめられる。